Geometria równań liniowych

Podstawowym problemem w algebrze liniowej jest rozwiązywanie układów n równań liniowych z n niewiadomymi; dla przykładu:

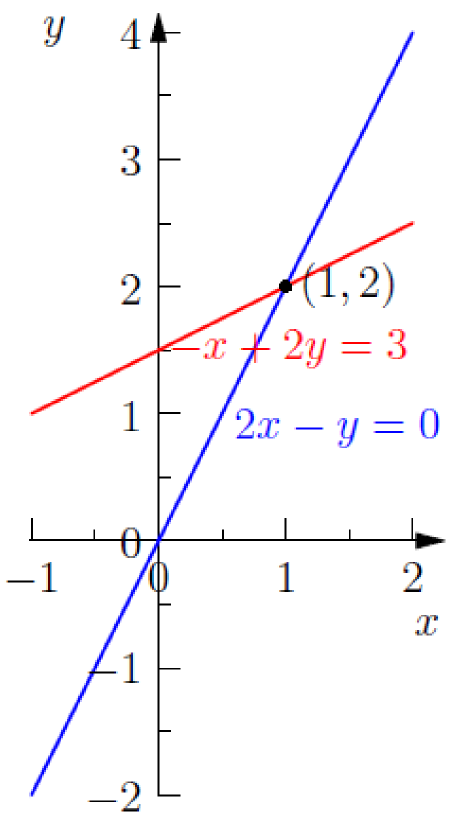
$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

Na tym pierwszym spotkaniu z algebrą liniową zobaczymy ten problem z trzech punktów widzenia.

Powyżej zaprezentowany układ równań jest dwuwymiarowy ($n = 2$). Przez dodanie trzeciej zmiennej z możemy go rozszerzyć do układu trójwymiarowego.

Rysunek z punktu widzenia wierszy

Narysujemy punkty w układzie współrzędnych prostokątnych, które spełniają każde równanie i poprowadzimy proste przez te punkty. Punkt, w którym następuje przecięcie prostych, (jeśli się przecinają) reprezentuje rozwiązanie układu równań. Patrząc na rysunek 1 widzimy, że rozwiązaniem tego układu równań jest punkt o współrzędnych $x = 1$ i $y = 2$.



Rys. 1. Proste $2x - y = 0$ i $-x + 2y = 3$ przecinają się w punkcie $(1,2)$.

Podstawiając to rozwiązanie w miejsce zmiennych x i y do oryginalnego układu w celu sprawdzenia poprawności rozwiązania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2\cdot 1-2&=0 \\ -1+2\cdot 2&=3 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem układu trzech równań z trzema niewiadomymi jest punkt wspólny trzech płaszczyzn, (jeśli istnieje).

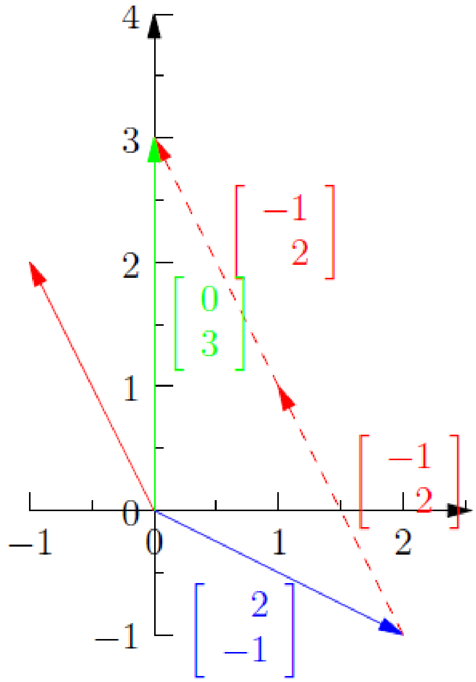
Rysunek z punktu widzenia kolumn

Z punktu widzenia kolumn przepiszemy układ równań, jako pojedyncze równanie poprzez zamianę współczynników w kolumnach układu na wektory.

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dla danych dwóch wektorów **c** i **d** i skalarów x i y, suma x**c** + y**d** jest nazywana ***liniową kombinacją*** wektorów **c** i **d**. (W dalszym ciągu tego kursu liniowe kombinację odgrywają ważną rolę).

Geometrycznie, chcemy znaleźć liczby x i y, takie, że x kopii wektora $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ dodane do y kopii wektora $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ jest równe wektorowi $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Jak widzimy na rysunku 2, $x=1$ i $y=2$ zgadzają się z otrzymanym poprzednio rozwiązaniem.



Rys. 2. Liniowa kombinacja wektorów kolumnowych równa się wektorowi **b**.

W trzech wymiarach, rysunek z punktu widzenia kolumn wymaga znalezienia liniowej kombinacji trzech trójwymiarowych wektorów równej wektorowi **b**.

Rysunek z punktu widzenia macierzy

Zapiszemy układ równań:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

Jako pojedyncze równanie z użyciem macierzy i wektorów:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ jest nazywana ***macierzą współczynników***. Wektor $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ jest wektorem ***niewiadomych***. Po prawej stronie równania mamy wektor **b**. Możemy napisać:

$$Ax = \mathrm{b}.$$

Przypadek trójwymiarowy jest podobny z wyjątkiem tego, że wektory są trójwymiarowe a macierz jest stopnia 3 tzn. ma trzy wiersze i trzy kolumny.

Mnożenie macierzy

Jak moży się macierz A przez wektor **x**?

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = ?$$

Jedną metodą jest potraktować składowe wektora **x** jako współczynniki kombinacji liniowej kolumnowych wektorów macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ten sposób pokazuje, że A**x** jest liniową kombinacją kolumn macierzy A.

Inną metodą jest obliczenie A**x** jako iloczynów skalarnych wierszy macierzy A i wektora **x**:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Liniowa niezależność

W kolumnowym i macierzowym punkcie widzenia prawą stroną równania jest wektor **b**. Czy mając daną macierz A możemy rozwiązać równanie

$$Ax = \mathrm{b}$$

Dla każdego możliwego wektora **b**? Innymi słowy, czy liniowe kombinacje kolumn macierzy A wypełniają płaszczyznę xy (lub w przypadku trójwymiarowym – całą przestrzeń R^3)?

Jeślo odpowiedź jest „nie", mówimy, że A jest macierzą osobliwą (singular). W tym przypadku kolumny macierzy A są ***liniowo zależne***; wszystkie kobminacje liniowe kolumn macierzy A leżą w punkcie lub na jednej linii (w dwóch wymiarach) lub w punkcjie, na jednej linii lub na jednej płaszczyźnie (w trzech wymiarach). Wszystkie kombinacje kolumn macierzy A nie wypełniają całej przestrzeni.

Eliminacja z macierzami

Metoda eliminacji

Eliminacja jest metodą najczęściej stosowaną przez oprogramowanie komputerowe do rozwiązywania układów równań liniowych. Pozwala ona znajdować rozwiązanie równania $Ax = \mathrm{b}$ o ile macierz A nie jest osobliwa (jest odwracalna). Pozłużymy się następującym przykładowym układem równań, w którym:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Element 1 w lewym górnym rogu macierzy A jest nazywany pierwszym elementem **głównym**. Kopiujemy wiersz pierwszy, mnożymy go przez odpowiednią liczbę (w naszym przypadku 3) i odejmujemy od wiersza drugiego. Skutkiem tego pierwszy element wiersza drugiego staje si e równy 0. Zatem ***wyeliminowaliśmy*** element 3 z drugiego wiersza i pierwszej kolumny.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Następnym krokiem jest wykonać następną eliminacje aby uzyskać 0 w wierszu 3 i kolumnie 1. W tym przykładzie nie jest to potrzebne bo już jest tam 0.

Następnym elementem głównym jest wartość 2 w drugim wierszu i drugiej kolumnie. Znajdujemy mnożnik (w tym przypadku 2), przez który mnożymu wiersz drugi aby wyeliminować 4 z trzeciego wiersza i drugiej kolumny.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Trzecim elementem głównym jest wartość 5 w trzecim wierszu i trzeciej kolumnie. Rozpoczęliśmy eliminację od macierzy odwracalnej A i skończyliśmy na macierzy **górnej trójkątnej** U . Lewa dolna część macierzy U jest wypełniona zerami. Elementy główne 1, 2, 5 znajdują się na głównej przekątnej macierzy U (przekątna główna macierzy kwadratowej to przekątna z lewego górnego narożnika do prawego dolnego narożnika).

Powtarzamy takie same operacje mnożenia i odejmowania wierszy dla wektora $\mathrm{b}=\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Czyli mnożymy przez 2 wlwmwnt na pierwszej pozycji i odejmujemy go od 12 aby otrzymać 6 na pozycji drugiej. Aby uprościć obliczenia zwykle dołączamy wektor b jako ostatnią kolumnę macierzy A.

Metoda eliminacji przekształca równanie $Ax = \mathrm{b}$ w równanie $Ux = \mathrm{c}$. W naszym przykładzie, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ otrzymujemy z macierzy A oraz $\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$ otrzymujemy z wektora b.

Równanie $Ux = \mathrm{b}$ jest łatwe do rozwiązania poprzez tzw. Wsteczne podstawianie; w naszym przykładzie, $z = -2, y = 1, x = 2$. Jest to także rozwiązanie wyjściowego układu równań $Ax = \mathrm{b}$.

Wyznacznik macierzy U jest iloczynem elementów głównych.

Elementy główne nie mogą być zerami. Jeśli zdarzy się że jakiś element główny będzioe zerem, trzeba zamienić miejscami wiersz zawierający taki element główny z innym wierszem tak aby na pozycji elementu głównego nie było zera.

Jeśli zdarzy się zero na pozycji elementu głównego i nie ma różnych od zera elementów poniżej (w tej kolumnie) to macierz A jest nieodwracalna (tzn. jest osobliwa innymi słowy jej wyznacznik jest równy zero). W takiej sytuacji nie można użyć metody eliminacji do znalezienia unikalnego rozwiązania układu równań ponieważ ono nie istnieje.

Macierz eliminacji

Iloczyn macierzy (3x3) i wektora kolumnowego (3x1) jest wektorem kolumnowym (3x1), który jest liniową kombinacją kolumn macierzy.

Iloczyn wierszowego wektora (1x3) i macierzy (3x3) jest wierszowym wektorem (1x3) i jest liniową kombinacją wierszy macierzy.

Można zatem obliczyć macierz po pierwszej eliminacji mnożąc macierze:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz eliminacji użyta do eliminacji wartości w wierszu m i kolumnie n jest oznaczana symbolem E_{mn}. Obliczenie powyżej jest zatem obliczeniem $E_{21}A$. Wykonane trzy ktoki eliminacji prowadzące do macierzy U można zapisać jako: $E_{32}\left(E_{31}\left(E_{21}A\right)\right) = U$, gdzie $E_{31} = I$. Zatem $E_{32}\left(E_{21}A\right) = U$.

Operacja mnożenia macierzy jest łączna zatem można także napisać $\left(E_{32}E_{21}\right)A = U$.

Iloczyn $E_{32}E_{21}$ mówi jak przejść z A do U. Macierz odwrotna do macierzy $E_{32}E_{21}$ mówi jak przejść z U do A.

Jeśli rozwiążemy $Ux = EAx = E\mathrm{b}$, wtedy rozwiązanie to jest też rozwiązaniem układu $Ax = \mathrm{b}$.

Macierz permutacji zamienia miejscami dwa wiersze macierzy; na przykład

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pierwszy i drugi wiersz macierzy PA są drugim i pierwszym wierszem macierzy A. Macierz permutacji powstaje poprzez zamianę wierszy w macierzy jednostkowej.

Aby zamienić kolumny macierzy A, trzeba mnożyć prawostronnie przez macierz permutacji (AP). Zauważmy że mnożenie macierzy nie jest przemienne tzn.: $PA \neq AP$.

<u>Przykład obliczeniowy (macierz permutacji).</u>

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

W wyniku mnożenia macierzy permutacji (macierzy jednostkowej, w której zamieniono wiersze 1 i 2) i macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ nastąpiła zamiana wierszy 1 i 2 w drugiej macierzy.

Odwrotności

Dana jest macierz: $E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, która odejmuje trzykrotność wiersza pierwszego od wiersza drugiego. Aby odwrócić tą operację trzeba dodać trzykrotność wiersza pierwszego do wiersza drugiego. Można to zrobić używając odwrotności macierzy E_{21} .

$$E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jest przecież $E_{21}^{-1} E_{21} = I$.

Przegląd kluczowych idei

To jest przegląd liniowej algebry w kursie matematyki dla inżynierów.

Algebra liniowa zajmuje się (dotyczy) wektorów, macierzy oraz przestrzeni i i podprzestrzeni.

Wektory

Podstawową operacją wykonywaną na wektorach jest ich kombinacja liniowa.

Można mnożyć wektory przez skalary (liczby), dodawać i odejmować. Mając dane wektory **u**, **v** i **w** można utworzyć liniową kombinację tych erktorów:

$$x_1 \mathrm{u} + x_2 \mathrm{v} + x_3 \mathrm{w} = \mathrm{b} .$$

Przykład wektorów z przestrzeni R^3:

$$\mathrm{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathrm{v} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kolekcja wszystkich iloczynów wektora u i liczb rzeczywistuch jest linią prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Kolekcja analogicznych iloczynów wektora v tworzy inną linię przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Kolekcja wszystkich kombinacji liniowych wektorów u i v tworzy płaszczyznę przechodzącą przez początek układu współrzędnych.

Biorąc wszystkie kombinacje pewnych wektorów otrzymujemy ***podprzestrzeń***.

Można kontynuować jak dotąd, lub można użyć macierzy aby uwzględnić także wszystkie iloczyny wektora w i liczb rzeczywistych.

Macierze

Macierz powstaje jako zestawienie kolumn będących wektorami u, v i w.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iloczyn macierzy i wektora:

$$A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Jest równy sumie $x_1\mathrm{u} + x_2\mathrm{v} + x_3\mathrm{w} = \mathrm{b}$. Zatem iloczym taki jest kombinacją liniową kolumn macierzy. (Ta szczególna macierz A jest ***macierzą różnicową*** ponieważ składniki $A\mathrm{x}$ są różnicami składowych wektora x).

Kiedy piszemy , to myślimy o mnożeniu liczb i wektorów; wkiedy piszemy $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, to myślimy o mnożeniu macierzy (której kolumnami są wektory u, v i w) przez liczby. Obliczenia są te same ale sposób widzenia (i myślenia) jest inny.

Dla pewnego wektora x, wynik „mnożenia przez macierz A” jest pewnym wektorem b:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Głębszym problemem jest zacząć od wektora b i zapytać „dla jakich wektorówści x zachodzi $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$?” W naszym przykładzie oznacza to rozwiązanie układu trzech równań z trzema niewiadomymi. Obliczenie:

$$A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Jest równoważne obliczeniu:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_2 - x_1 &= b_2 \\ x_3 - x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

Widzimy, że $x_1 = b_1$, $x_2 = b_1 + b_2$, $x_3 = b_1 + b_2 + b_3$. W postaci wektorowej rozwiązanie przedstawia się:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 + b_3 \end{bmatrix}.$$

Ale powyższe równanie wektorowe może być zapisane jako:

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

lub jako $\mathrm{x} = A^{-1}\mathrm{b}$. Jeśli macierz A jest odwracalna (nieosobliwa), możemy przemnożyć obie strony przez A^{-1} aby znaleźć unikalne rozwiązanie x równania $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$. Można by powiedzieć, że A reprezentuje transformację $\mathrm{x} \to \mathrm{b}$, która ma odwrotną transformację $\mathrm{b} \to \mathrm{x}$.

W szczególności, jeśli $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, to $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

W następnym przykładzie macierz C ma te same kolumny u i v ale zmienioną kolumnę w:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy otrzymujemy:

$$C\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

I nasz układ trzech równań z trzema niewiadomymi staje się cykliczny (circular).

O ile w poprzednio $A\mathrm{x} = 0$ pociągało za sobą, że $\mathrm{x} = 0$, o tyle teraz istnieją niezerowe wektory x, dla których $C\mathrm{x} = 0$. Dla każdego wektora x o jednakowych składowych (czyli $x_1 = x_2 = x_3$) zachodzi $C\mathrm{x} = 0$. To jest znacząca różnica w stosunku do poprzedniej sytuacji; nie możemy pomnożyć obustronnie równania $C\mathrm{x} = 0$ przez odwrotność macierzy C aby otrzymać unikalne niezerowe rozwiązanie x.

Układ równań $C\mathrm{x} = \mathrm{b}$ zapiszemy jako:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= b_1 \\ x_2 - x_1 &= b_2 \\ x_3 - x_2 &= b_3 \end{aligned}.$$

Jeśli dodamy wszystkie równania, otrzymamy:

$$0 = b_1 + b_2 + b_3 .$$

Ostatni zapis mówi, że równanie $C\mathrm{x} = \mathrm{b}$ ma rozwiązanie x tylko wtedy, kiedy składowe wektora b sumują się do 0. W sensie fizycznym oznacza to, że system jest stabilny tak długo jak siły się równoważą.

Podprzestrzenie

Geometrycznie rzecz biorąc, kolumny macierzy C są wektorami leżącymi na tej samej płaszczyźnie (są zatem liniowo zależne; kolumny macierzy A są liniowo niezależne). Jest wiele wektorów w R^3, które nie leżą na tej płaszczyźnie. Takie wektory nie mogą być przedstawione jako kombinacje liniowe kolumn macierzy C i odpowiadają takim wektorom b, dla których równanie $C\mathrm{x} = \mathrm{b}$ nie ma rozwiązań x. Liniowe kombinacje kolumn macierzy C generują podprzestrzeń dwuwymiarową przestrzeni R^3.

Ta płaszczyzna (podprzestrzeń) złożona z kombinacji wektorów u, v i w może być opisana jako „wszystkie wektory $C\mathrm{x}$". Wiemy jednak, że wektory b, dla których $C\mathrm{x} = \mathrm{b}$ spełniają warunek $b_1 + b_2 + b_3 = 0$. Zatem płaszczyzna złożona z wszystkich kombinacji wektorów u i v składa się z wektorów, któruch składowe sumują się do 0.

Jeśli rozważymy wszystkie kombinacje wektorów:

$$\mathrm{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathrm{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ \mathrm{i} \ \mathrm{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Otrzymamy całą przestrzeń R^3; równanie $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ ma rozwiązanie dla każdego b w R^3. Mówimy, że wektory u, v i w tworzą **bazę** przestrzeni R^3.

Baż a przestrzeni R^n jest zbiór n liniowo niezależnych wektorów przestrzeni R^n. Innymi słowy bazą przestrzeni R^n jest zbiór n wektorów, których kombinacje liniowe pokrywają (generują) całą przestrzeń. Jeszcze inaczej: zbiór wektorów tworzy bazę wtedy i tylko wtedy gdy macierz, której kolumnami są te wektory jets odwracalna (nieosobliwa).

Przestrzeń wektorowa jest zbiorem wektorów, który jest zamknięty na operację liniowych kombinacji (tzn. kombinacje liniowe wektorów z tego zbioru są wektorami z tego zbioru).

Podprzestrzeń jest przestrzenią wektorową zanurzoną wewnątrz innej przestrzeni wektorowej. Przykładem może być linia prosta przecgodząca przez początek układy współrzędnych lub płaszczyzna zawierająca początek układy. Podprzestrzeń może być równa całej przestrzeni w której jest zawarta; najmniejszą podprzestrzenią jest zbiór złożony tylko z wektora zerowego.

Podprzestrzeniami przestrzeni R^3 są:

początek układu współrzędnych, linia prosta przechodząca przez początek układu, płaszczyzna zawierająca początek układu, cała przestrzeń R^3.

Konkluzja

Kiedy patrzysz na macierz, spróbuj zobaczyć „co ona robi?”

Macierze mogą być prostokątne; można mieć siedem równań z trzema niewiadomymi. Prostokątne macierze nie są odwracalne, ale symetryczna, kwadratowa macierz $A^T A$, która się często pojawia gdy używa się prostokątnych macierzy może być odwaraclna.

Mnożenie i odwracanie macierzy

Mnożenie macierzy

Przedyskutujemy cztery sposoby myślenia o iloczynie $AB = C$ dwóch macierzy A i B. Jeśli A jest macierzą o m wierszach i n kolumnach (m x n) i B jest macierzą n x p, wtedy C jest macierzą m x p. Używamy notacji c_{ij}, dla oznaczenia elementu macierzy znajdującego się w i-tym wierszy i j-tej kolumnie macierzy C.

Standardowy sposób myślenia o iloczynie (wiersze razy kolumny)

Standardowy sposób opisania iloczynu macierzy, to sposób, w którym c_{ij} jest równe iloczynowi skalarnemu i-tego wiersza macierzy A oraz j-tej kolumny macierzy B. Innymi słowy:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} .$$

Kolumnowy sposób myślenia o iloczynie macierzy

Iloczyn macierzy A i j-tej kolumny macierzy B równa się j-tej kolumnie macierzy C. Oznacza to, że kolumny macierzy C są liniowymi kombinacjami kolumn macierzy A. (współczynnikami kombinacji są elementy kolumn macierzy B).

Wierszowy sposób myślenia o iloczynie macierzy

Iloczyn i -tego wiersza macierzy A oraz macierzy B równa się i-temu wierszowi macierzy C. Oznacza to, że wiersze macierzy C są liniowymi kombinacjami wierszy macierzy B. (Współczynnikami tych kombinacji są elementy wierszy macierzy A).

Kolumny razy wiersze

Kolumna macierzy A jest wektorem m x1, a wiersz macierzy B jest wektorem 1x p. Ich iloczyn jest macierzą:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}.$$

Kolumny wynikowej macierzy są iloczynami kolumn macierzy A i elementów wierszy macierzy B, a wiersze macierzy wynikowej są iloczynami wierszy macierzy B i elementów kolumn macierzy A. Jeßli myślimy o elementach wierszy macierzy wynikowej jako o współrzędnych $(2,12)$, $(3,18)$ i $(4,24)$, to zauważymy, że leżą one na jednej prostej; podobnie jeśli potraktujemy kolumny macierzy wynikowej jako współrzędne $(2,3,4)$ i $(12,18,24)$, to także leżą one na jednej linii. Dalej zobaczymy, że oznacza to, że ***przestrzeń wierszy*** tej macierzy jest linią prostą, oraz że ***przestrzeń kolumn*** także jest jedną linią prostą.

Iloczyn macierzy A i B jest sumą tych macierzy wynikowych uzyskanych poprzez mnożenie „kolumn i wierszy”:

$$AB = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{k1} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix}.$$

Blokowy sposób myślenia o iloczynie macierzy

Jeśli podzielimy A i B na bloki w odpowiedni sposób, to możemy napisać iloczyn macierzy $AB = C$ w terminach iloczynów tych bloków:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}.$$

Gdzie $C_1 = A_1B_1 + A_2B_3$.

Odwrotności

Macierze kwadratowe

Jeśli A jest macierzą kwadratową, to jednym z najważniejszych pytań jakie można zadać jest pytanie czy istnieje macierz odwrotna A^{-1} do macierzy A. Jeśli istnieje, to $A^{-1}A = I = AA^{-1}$ i mówimy wtedy, że A jest ***odwracalna*** lub ***nieosobliwa****i.*

Jeśli A jest osobliwa – tzn. nie istnieje macierz odwrotna – to wyznacznik macierzy A jest równy 0 i istnieją wtedy niezerowe wektory x, dla których $A\mathrm{x} = 0$. Dla przykładu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

W powyższym przykładzie, trzyktorność pierwszej kolumny minus jednokrotność drugiej kolumny jest równa wektorowi zerowemu; Dzieje się tak dlatego, że pierwsza i druga kolumna macierzy są współliniowe albo immymi słowy leżą na jednej prostej.

Poszukiwanie macierzy odwrotnej jest ściśle związane z rozwiązaniem układów równań liniowych:

$$\underset{\mathrm{A}}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}}\underset{\mathrm{A}^{-1}}{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}=\underset{\mathrm{I}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Można powiedzieć: „ A przemnożone przez j -ta kolumnę macierzy A^{-1} jest równe j -tej kolumnie macierzy jednostkowej”. Odpowiada to więc rozwiązaniu dwóch układów równań liniowych. W pierwszym niewiadome tworzy pierwsza kolumna macierzy ą A^{-1} a po prawej stronie układu jest pierwsza kolumna macierzy jednostkowej a w drugim niewiadome tworzy druga kolumna macierzy A^{-1} a po prawej stronie układu jest druga kolumna macierzy jednostkowej.

Eliminacja Gaussa-Jordana

Możemy użyć metody eliminacji do rozwiązania dwóch lub więcej układów równań liniowych w tym samym czasie. W tym celu rozszerzamy macierz A o kolumny macierzy jednostkowej I :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

(Najpierw stosujemy metodę Gaussa do przekształcenia oryginalnej macierzy do macierzy gólnej trójkątnej a następnie używamy eliminacji Jordana by wyeliminować elementy powyżej głównej przekątnej). Otrzymujemy w tren sposób macierz odwrotną na pozycji macierzy jednostkowej i macierz jednostkową na pozycji macierzy oryginalnej.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$